Goethe-Gymnasium Düsseldorf

Lindemannstr. 57

40237 Düsseldorf

Facharbeit im Fach Mathematik

Schuljahr 2006/07

DER GÖDELSCHE UNVOLLSTÄNDIG-KEITSSATZ

von

Alexandra Surdina

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkung

Im ersten Teil meiner Arbeit stelle ich den Gödelschen Unvollständigkeitssatz vor dem geschichtlichen Hintergrund dar, während der zweite Teil eine genauere Erläuterung des Satzes umfasst und den Beweis in seinen Teilen erklärt. Ergänzende Details sowie Anwendungen und Folgen des Satzes finden sich im Anhang.

2 Der Gödelsche Satz

2.1 Geschichtlicher Hintergrund

Die Mathematik ist eine Wissenschaft, die nicht durch Experimente, sondern durch Schlussfolgerungen ihre Erkenntnisse gewinnt — ein neues Ergebnis ist stets der Schluss eines logischen Beweises. Erst zur Mitte des 19. Jahrhunderts hin begann man, sich über das Wesen und die Schlussweisen der Mathematik, welche man vorher ohne zu hinterfragen betrieben hatte, Gedanken zu machen.[1]

Es entstand die verbreitete Meinung, alle möglichen wahren Aussagen in jedem Bereich der Mathematik ließen sich mithilfe von logischen Ableitungsregeln aus den ursprünglichen Axiomen ableiten.[2] David Hilbert trug im Jahr 1900 auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris 10 ausgewählte

[1]Kaiser, Hans und Nöbauer, Wilfried, Geschichte der Mathematik, Oldenbourg Schulbuchverlag, München, 2002, S.74

[2]Nagel, Ernest und Newman, James, Gödel's Proof, Routledge & Kegan Paul, 1981

Probleme aus seiner zusammengestellten Liste von 23 bis dahin (und in Teilen noch immer) ungelösten Problemen der Mathematik vor. Zur Lösung des Problems eines Beweises der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik, welches er in der Liste als zweites nennt, schlug er ein Forschungsprogramm[3] vor. Damit wollte er die gesamte Mathematik als ein großes formales System darstellen, in dem ausschließlich wahre Aussagen ableitbar sind und in welchem sich alle wahren Aussagen von dem anfänglichen Axiomensatz ableiten lassen.

2.2 Metamathematik

Sein Ansatz beruhte im Wesentlichen auf einer Formalisierung der Mathematik. Alle Aussagen, welche Informationen *über das formale System* enthielten, waren Aussagen der Metamathematik und gehörten nicht zum formalen System selbst. Die Gleichung $1+1=2$ beispielsweise ist eine Aussage der Mathematik, während "'$1+1=2$' *ist eine mathematische Gleichung.*" eine Aussage der Metamathematik *über* die Mathematik ist. Metamathematische Aussagen enthalten keine Zeichen oder Formeln der Mathematik.[4]

Ein finiter Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik würde also in endlich vielen Schritten zeigen, dass zwei widersprüchliche Formeln, wie etwa A und $\neg A$, nicht beide nach feststehenden Ableitungsregeln von den Axiomen

[3] Siehe Abschnitt „Hilberts Programm" im Anhang.

[4] Sie enthalten lediglich deren Namen, ebenso wie der Satz „Düsseldorf ist eine Stadt am Rhein." nicht die Stadt Düsseldorf selbst enthält. Nagel, Ernest und Newman, James, Gödel's Proof, Routledge & Kegan Paul, 1981

abgeleitet werden können.

2.3 Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Kurt Gödels Satz liefert einen Nachweis der Tatsache, dass in einem formalen System wie der Arithmetik nicht jede Aussage formal beweisbar oder widerlegbar ist. Er lautet:

> Jedes hinreichend mächtige formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.[5]

Hinreichende Mächtigkeit bedeutet hier, dass das System eine Theorie der natürlichen Zahlen enthält und jene Operationen zulässt, die für die Durchführung des Gödelschen Beweises erforderlich sind.

3 Der Beweis

3.1 Das Lügner-Paradox, Selbstbezüglichkeit

Der Beweis baut auf einem Paradox auf, welches als das Lügner- bzw. Epimenides-Paradox bekannt ist, benannt nach dem Kreter Epimenides, welcher den folgenden Satz geäußert haben soll: „Alle Kreter sind Lügner.“ Das Paradoxe an dem Satz ist, dass man, von der Annahme ausgehend, dass der Satz wahr ist, bedenken muss, dass Epimenides selbst Kreter war und daher lügt und somit zu dem Schluss gelangt, dass

[5] http://de.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6delscher_Unvollst%C3%A4ndigkeitssatz

der Satz nicht wahr ist. In etwas reduzierter Form lautet das Paradox folgendermaßen:

> Dieser Satz ist nicht wahr.[6]

Der Satz ist genau dann wahr, wenn er falsch ist und falsch, wenn er wahr ist. Das Paradox entsteht dadurch, dass ein Satz sich auf sich selbst bezieht und dabei eine Aussage über die eigene Richtigkeit trifft.

3.2 Das formale System

Gödels Nachweis der Existenz formal unentscheidbarer Sätze bezieht sich auf ein formales System P, welches im Wesentlichen auf der Logik der *Principia Mathematica* beruht, jedoch um die Peanoschen Axiome ergänzt ist[7] Eine Liste dieser Axiome findet sich in A.4. Die Grundzeichen des Systems P nach Gödel[8] sind logische Konstanten und Variablen[9].

3.3 Zusammenfassung des Beweises

Gödels Beweis ist in seinen Grundzügen sehr simpel. Er bezieht sich auf die formalen Systeme der *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre* und der *Principia*

[6]Hofstadter, Douglas R.: Gödel, Escher, Bach – ein endloses geflochtenes Band, dtv 1991

[7]Laut Gödel dient diese Ergänzung *lediglich der Vereinfachung des Beweises* und ist *prinzipiell entbehrlich*.

[8]Gödel, Kurt, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 1931

[9]Gödel untergliedert in „Variablen ersten Typs“ (auch *numerische Variablen* genannt) für natürliche Zahlen einschließlich 0, Variablen zweiten Typs (auch *Satzvariablen* genannt) für Formeln oder Sätze und Variablen dritten Typs (auch *Prädikatvariablen* genannt) für Prädikate wie „ist Primzahl“

Mathematica[10], welche auf der Vermutung basierten, man könnte auf Basis weniger Axiome alle möglichen mathematischen Fragen in diesen Systemen entscheiden.

Der Beweis baut auf der Konstruktion eines unentscheidbaren Satzes auf, der die folgende Aussage enthält: „Ich bin nicht beweisbar.“ Unentscheidbar ist ein Satz dann, wenn weder der Satz selbst, noch sein Gegenteil bewiesen werden kann.

Um einen Satz zu erzeugen, der seine eigene Unbeweisbarkeit aussagt und dabei den Trugschluss zu vermeiden, welcher Richard[11] unterlaufen war, bedurfte es zunächst einer Methode, um Aussagen *über* das formale System *im* formalen System selbst repräsentieren zu können. Die Methode, die Gödel hier benutzte, wird heute ihm zu Ehren auch als Gödelisierung bezeichnet. Jeder logischen Aussage, jedem Satz, jedem Beweis, jeder Aussage über Zahlen wird eine bestimmte Zahl zugeordnet: die Gödelzahl. So werden Aussagen über die Mathematik zu deren Gegenständen, nämlich zu Zahlen.

Der Hauptidee des Beweises besteht darin, dass Formeln eines formalen Systems aus endlichen Reihen von Grundzeichen[12] und Beweise aus endlichen Reihen von Formeln, also letztlich aus endlichen Reihen endlicher Reihen von Grundzeichen bestehen und sich Grundzeichen von daher

[10] Siehe Abschnitt „Principia Mathematica“ im Anhang.

[11] Siehe „Die Antinomie von Richard“ im Anhang.

[12] Grundzeichen sind hierbei sowohl Zahlen, als auch logische Konstanten wie „oder“ und „wenn, dann“ als auch Variablen

in eineindeutiger Weise auf natürliche Zahlen abbilden lassen.

Einen unentscheidbaren Satz stellt Gödel nun analog zu der Konstruktion des Widerspruchs in der Antinomie von Richard[13] her. Er konstruiert mit Hilfe von dem objektsprachlichen Äquivalent zum Beweisbarkeitsprädikat, dem Verhältnis „Der Satz mit der Gödelzahl x ist ein Beweis für den Satz mit der Gödelzahl y“, zunächst eine Aussage der Form „Der Satz mit der Gödelzahl n ist nicht beweisbar.“. Anschließend substituiert er n durch die Gödelzahl der Aussage selbst und erhält somit einen selbstbezüglichen unentscheidbaren Satz, der behauptet, nicht beweisbar zu sein.

3.4 Arithmetisierung der Metamathematik

Um innerhalb der Mathematik Aussagen über die Mathematik treffen zu können, brauchte es ein Verfahren, das es erlaubte, metamathematische Aussagen über die Mathematik auf Aussagen der Mathematik selbst abzubilden. Gödels Idee war es nun, Grundzeichen des formalen Systems auf natürliche Zahlen[14] abzubilden. Dadurch wird es möglich, arithmetische Sachverhalte auf arithmetische Gegenstände abzubilden.

Zuerst wird jedem Grundzeichen in eineindeutiger[15] Weise eine natürliche Zahl zugeordnet. Hierbei ist der Ausgangspunkt, dass für den Beweis eine abzählbare Anzahl von Variablen zur Verfügung steht. Gödel selbst verwendet

[13] Siehe Anhang.
[14] Heute wird das Verfahren Gödel zu Ehren auch als *Gödelisierung* bezeichnet.
[15] d.h. die Zuordnung muss eindeutig und umkehrbar sein

jeweils drei Variablen eines Typs. Damit nicht für jede natürliche Zahl explizit eine neue natürliche Zahl definiert werden muss, welche für sie kodiert, kann man jede beliebige Zahl als einen direkten Nachfolger von 0, oder als einen direkten Nachfolger eines direkten Nachfolgers, oder als einen direkten Nachfolger eines direkten Nachfolgers [...] eines direkten Nachfolgers ausdrücken. Die 1 z.B. ist direkter Nachfolger von 0 und kann auch geschrieben werden als $0f$, die 2 als $0ff$, die 42 als eine 0 mit zweiundvierzig f's dahinter.

Zahlen können eindeutig in Primzahlfaktoren zerlegt werden. Weil jeder noch so komplexe formale Ausdruck eine Zeichenfolge ist, können beliebige formale Ausdrücke wie beschrieben in Form der darin enthaltenen Zeichen auf Zahlen abgebildet werden. Im zweiten Schritt wird nun mit jeder dieser Zahlen in derselben Reihenfolge eine Primzahl der aufsteigenden Reihe von Primzahlen potenziert. Die so erhaltenen Zahlen werden miteinander multipliziert. Das erhaltene Produkt entspricht der Abbildung der ursprünglichen Zeichenkette auf eine natürliche Zahl und wird als *Gödelzahl* des Beweises bezeichnet. Diese Gödelzahl ist als natürliche Zahl Teil der Objektsprache und kann somit in objektsprachliche Aussagen als Kodierung für den ursprünglichen Satz eingesetzt werden.

Für eine Auflistung der Grundzeichen und deren Gödelzahlen sowie deren Bedeutung [16] siehe A.5.

Zur Veranschaulichung eine beispielhafte Gödelisierung einer einfachen Formel:

$$\begin{array}{ccccccl}
0 & & = & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \text{1. Schritt} \\
6 & & 5 & & 6 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \text{2. Schritt} \\
2^6 & \times & 3^5 & \times & 5^6 & = 243000000 &
\end{array}$$

Der erste Schritt ist die Abbildung der Grundzeichen auf die zugehörigen natürlichen Zahlen. Im zweiten Schritt werden die so bestimmten Zahlen als Exponenten der aufsteigenden Primzahlenreihe verwendet.

243000000 ist also die Gödelzahl der Formel $0 = 0$.

Auch die Aussage „x ist eine beweisbare Formel“ kann man innerhalb des Systems selbst abbilden, nämlich als ein Prädikat $Bew(G_B, G_x)$, das — inhaltlich gedeutet — aussagt, dass die Formelfolge B mit der Gödelzahl G_B ein Beweis für die Formel mit der Gödelzahl der Formel x (also für die Formel x) ist. Dass es ein solches G_B gibt, für welches diese Aussage zutrifft, bedeutet, dass es einen Beweis für die Formel gibt.

[16] Gödels ursprüngliche Nummerierung war eine etwas andere: Er verwendete lediglich sieben logische Konstanten und vergab ihnen die Nummern der ersten sieben Primzahlen. Solche Feinheiten sind jedoch für seinen Beweis an sich irrelevant; die verwendeten natürlichen Zahlen sind prinzipiell beliebig wählbar und Autoren von Büchern zu diesem Thema pflegen eine jeweils eigene Art dieser Nummerierung zu praktizieren. Ich habe für meine Ausführungen das Verfahren von Ernest Nagel und James R. Newman übernommen, weil ich dieses für das einfachste und naheliegendste halte.

Damit hatte Gödel einen Code gefunden, der fähig war, auch Beweisbeziehungen zwischen Sätzen eines Systems zu repräsentieren.

An dieser Stelle wird auch ersichtlich, warum das formale System, in welchem der Beweis vollzogen werden soll, hinreichend groß sein muss: Die oben stehende Kodifizierung muss machbar sein. Daher muss das System mindestens die Theorie der natürlichen Zahlen enthalten und Multiplikation, Addition sowie die Mengenlehre, welche im weiteren Verlauf benötigt wird, kennen.

3.5 Beweisbarkeit

Um Aussagen über die Beweisbarkeit von Sätzen treffen zu können, musste die metasprachliche Behauptung „B ist ein Beweis von A“ in eine objektsprachliche Aussage über Zahlen „Es existiert eine natürliche Zahl b, die die Gödelzahl derjenigen Folge von Formeln ist, die ein Beweis von A ist.“ verwandelt werden. Dies drückte Gödel folgendermaßen aus[17]:

$$\overset{B}{\vdash} A \Leftrightarrow Bew(b,a)$$

Das Prädikat $Bew(b,a)$ bedeutet: „b ist die Gödelzahl derjenigen Folge von Formeln, die ein Beweis für die Aussage mit der Gödelzahl a ist.“ Hierbei beschreibt $Bew(b,a)$ ein

[17] $\overset{B}{\vdash} A$ ist der symbolische Ausdruck für „Die Aussage A lässt sich mithilfe von Beweis B aus den Axiomen herleiten.“; $\Leftrightarrow$ ist das Zeichen für „gilt genau dann, wenn“.

Verhältnis zwischen Zahlen und hat keineswegs dieselbe Bedeutung wie $\overset{B}{\vdash} A$, das ein Verhältnis zwischen Zahlaussagen beschreibt. $Bew\,(b,a)$ ist sinngemäß so definiert, dass es immer nur dann wahr ist, wenn $\overset{B}{\vdash} A$ wahr ist.

Zu zeigen war nun, dass sämtliche finiten Beweise in der Kodifizierung durch Gödelzahlen enthalten sind. Erst dann kann innerhalb der Kodifizierung ausgedrückt werden, dass eine Formel keinen Beweis hat.

3.6 Selbstbezüglichkeit

Nun musste ein Satz konstruiert werden, der seine eigene Unbeweisbarkeit aussagt. Dazu konstruierte Gödel zunächst eine Aussage, die behauptete, dass es keinen Beweis für irgendeine bestimmte Aussage gibt. Dies war in Form der objektsprachlichen Aussage $\neg\exists b : Bew\,(b,a)$ („Es existiert kein b, so dass b die Gödelzahl einer Formelfolge ist, die ein Beweis für die Aussage mit der Gödelzahl a ist.“) möglich. Der entsprechende metasprachliche Sachverhalt ist $\neg\exists B : \overset{B}{\vdash} A$.

Nun stand der Übergang von der Aussage „A ist nicht beweisbar“ zu der Aussage „Dieser Satz ist nicht beweisbar“ an. Gödel wandte einen Trick an, indem er einen Satz der Form „Der Satz mit der Gödelzahl n ist nicht beweisbar“ konstruierte und die freie Variable n anschließend durch die Gödelzahl eben dieses Satzes substituierte.

3.7 Substitution

Gödel führte die Substitution $Sub(a,n,c)$ durch, was soviel bedeutet wie „Wird in der Formel mit der Gödelzahl a die einzige freie Variable durch die Zahl n ersetzt, so erhält man die Formel mit der Gödelzahl c.“. Bezeichnen wir die Formel mit der Gödelzahl a als A und nehmen an, dass sie als einzige freie Variable x enthält, können wir sie schreiben als arithmetische Funktion $A(x)$. Ersetzen wir die Variable x in A durch n, wird das Ergebnis als $A(x/n)$ geschrieben.[18]

Es gilt: $Sub(a,n,c) \Leftrightarrow A(x/n) \equiv C$. (C ist die Formel mit der Gödelzahl c.) Weiter gilt auch das bereits erwähnte $Bew(b,a) \Leftrightarrow \overset{B}{\vdash} A$. Was für ein beliebiges n gilt, muss insbesondere für ein spezifisches a gelten. Das Einsetzen der Gödelzahl des eigenen Satzes in die einzige freie Satzvariable lässt sich ausdrücken als: $Sub(a,a,c)$. Aus A konstruiere ich also $A(x/a)$. Hierbei ist a die Gödelzahl der Aussage A.

Nun fordere ich, dass $A(x/a)$, welches c als Gödelzahl besitzt, unbeweisbar ist[19]: $\neg\exists b \exists c : Sub(a,a,c) \wedge Bew(b,c)$ Der Sachverhalt $Sub(a,a,c)$ kann auch durch $c = sub(a,a)$ ausgedrückt werden. Das kleingeschriebene sub ist nun eine Funktion, welche den Wert c als Ergebnis liefert. Hieraus ergibt sich: $\neg\exists b : Bew(b, sub[a,a])$, was soviel bedeutet wie: „Der Satz, der dadurch entsteht, dass in der Satzform mit der

[18] Gödel-Satz, Möbius-Schleife, Computer-Ich, Franz Kreuzer, Franz Deuticke Verlagsgesellschaft m. b. H., Wien, 1986

[19] Gödel-Satz, Möbius-Schleife, Computer-Ich, Franz Kreuzer, Franz Deuticke Verlagsgesellschaft m. b. H., Wien, 1986

Gödelzahl a ihre einzige freie Variable durch ihre eigene Gödelzahl ersetzt wird, ist nicht beweisbar"[20]. Dieser Satz soll nun mit $F(a)$ bezeichnet werden.

Noch befindet sich in dem Satz $F(a)$ jedoch eine freie Variable, nämlich a, weshalb dieser Satz im Grunde bloß eine Satzform darstellt, welche keine Aussage bildet und der deswegen kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Erst durch Einsetzen einer konkreten Zahl für a erhalten wir einen geschlossenen Satz.

Die Satzform $F(a)$ hat selbst eine Gödelzahl, welche wir f nennen.

$$F(a) \Leftrightarrow \neg\exists b : Bew(b, sub[a,a])$$

$$f = Gz[F(a)]$$

Jetzt setzen wir eine konkrete Zahl in unsere Satzform ein, nämlich f. Wir erhalten den Satz $F(f)$.

$$F(f) \Leftrightarrow \neg\exists b : Bew(b, sub[f,f])$$

Daraus, dass $sub(f,f)$ per Definition *die Gödelzahl jenes Satzes ist, den man erhält, wenn man in der Satzform mit der Gödelzahl f die freie Variable durch f ersetzt*[21], ergibt sich, dass $Gz[F(f)] = sub(f,f)$ gilt.

[20] Gödel-Satz, Möbius-Schleife, Computer-Ich, Franz Kreuzer, Franz Deuticke Verlagsgesellschaft m. b. H., Wien, 1986

[21] Gödel-Satz, Möbius-Schleife, Computer-Ich, Franz Kreuzer, Franz Deuticke Verlagsgesellschaft m. b. H., Wien, 1986

3.8 Der Schluss

Unser konstruierter Satz, welcher inhaltlich „Der Satz mit der Gödelzahl f ist unbeweisbar.“ bedeutet, besitzt die Gödelzahl f. Er ist demnach also selbstbezüglich.

Formal lässt sich das damit begründen, dass man $sub[f,f]$ durch $Gz[\quad]$ ausdrückt:

$$\neg\exists b : Bew(b, sub[f,f]) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg\exists b : Bew(b, Gz[\neg\exists b : Bew(b, sub[f,f])])$$

$Gz[\quad]$ ist keine objektsprachliche Aussage und dient lediglich dem besseren Verständnis. Die offensichtliche Interpretation lautet, dass die Formel von sich selbst behauptet, unbeweisbar zu sein. Der untere Satz bedeutet: „Es gibt kein b, so dass b der Beweis dieses Satzes ist.“, was das selbe ist wie „Dieser Satz ist unbeweisbar.“.

Dies bedeutet noch lange nicht, dass dieser Satz gänzlich unbeweisbar ist. Der unter den Mathematikern von Gödels Zeit verbreitete Begriff der Beweisbarkeit diente lediglich dazu, den abstrakten Begriff der logischen Wahrheit von Aussagen zu ersetzen, um ihn intuitiv zugänglich zu machen. Die Wahrheit des Satzes ist lediglich nicht ableitbar. Tatsächlich beweisen lässt er sich mit einer einfachen metamathematischen Betrachtung: Da der Satz unentscheidbar ist, kann auch kein Beweis für ihn gefunden werden — der Inhalt des Satzes bewahrheitet sich also; er ist wahr.

Allerdings lässt sich der Satz tatsächlich nicht innerhalb des formalen Systems entscheiden. Wenn das System nun aber vollständig sein soll, muss jeder Satz, der von den Axiomen ableitbar ist, auch wahr sein. Da dieser Satz jedoch ausschließlich dann wahr ist, wenn dessen Gegenteil wahr ist, ist das System widersprüchlich. Akzeptiert man den Satz als unentscheidbar, ist das System zwar widerspruchsfrei, aber nicht vollständig. Hiermit hatte Gödel gezeigt, dass Hilberts Versuch, die Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zu beweisen, nicht gelingen konnte, da die Arithmetik dem Unvollständigkeitssatz zufolge nicht vollständig und widerspruchsfrei ist.

A Anhang A

A.1 Hilberts Programm

Hilbert kündigte an, mit seinem Ansatz zum Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik gleichzeitig die Widerspruchsfreiheit der Theorie der reellen Zahlen und der Mengenlehre zu beweisen.[22] Eigens dazu entwickelte er eine mathematische Theorie, die Theorie der „Metamathematik“.
Sein Beweis sollte in der Lage sein, die Widerspruchsfreiheit eines Systems zu begründen, ohne die Widerspruchsfreiheit eines anderen Systems vorauszusetzen. Er glaubte, dass jedes mathematische Kalkül sich als eine Auswahl vernetzter Formeln schreiben ließe, die miteinander in endlicher Weise verbunden sind und hoffte, so beweisen zu können, dass sich nicht zwei widersprüchliche Aussagen von den Axiomen eines gegebenen formalen Systems ableiten ließen.
Sein Ansatz beruhte auf den folgenden Vorschlägen:

- Das logische System wird vollständig formalisiert. Alle Ausdrücke werden in bedeutungsleere Zeichen umgewandelt.
  Hiermit wird ein Zeichensystem („Kalkül“) ohne weiteren Zusammenhang geschaffen. Dies ist die Mathematik.
- Es muss gewährleistet werden, dass alle

[22] Kaiser, Hans und Nöbauer, Wilfried, Geschichte der Mathematik, Oldenbourg Schulbuchverlag, München, 2002, S.75f.

bedeutungshaltigen Aussagen über das bedeutungsleere formalisierte System nicht selbst zum System gehören, sondern in einen Bereich außerhalb — dies bezeichnet der von Hilbert erfundene Begriff *Metamathematik*.

A.2 Principia Mathematica

Gödels im Jahr 1931 in der Zeitschrift „Monatshefte für Mathematik und Physik" erschienener Artikel mit dem Titel „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I" bezog sich auf ein ganz bestimmtes formales System — die „Principia Mathematica". Dies ist ein dreibändiges Werk von Bertrand Russell und Alfred North Whitehead, welches zwischen 1910 und 1913 erschien.[23] Die *Principia Mathematica* entsprang dem Versuch, die gesamte Mathematik in Form eines riesigen formalen Systems vollständig aus einem Satz von Axiomen herzuleiten. Nach Erscheinen des Werkes stand in Frage, ob dieser Versuch wirklich gelungen war und sich tatsächlich alle möglichen Wahrheiten ohne Widersprüche aus dem Grundsatz von Axiomen herleiten ließen. Erst Gödels Unvollständigkeitssatz zeigte, dass dies nicht stimmte, weil dies grundsätzlich unmöglich war und ist.

[23] http://de.wikipedia.org/wiki/Principia_mathematica

A.3 Die Antinomie von Richard

Ein dem Lügner-Paradox ähnliches Problem stellt die Antinomie von Richard, welche erstmals im Jahr 1905 durch den französischen Mathematiker Jules Richard bekannt wurde, dar.

Wir betrachten Ausdrücke der deutschen Sprache, die Definitionen von Eigenschaften der natürlichen Zahlen sind, d.h. Beschreibungen von mathematischen Eigenschaften. Die Anzahl der Ausdrücke, welche wir innerhalb der deutschen Sprache bilden, ist abzählbar. Deshalb muss auch die Anzahl der Definitionsausdrücke abzählbar sein. Nummerieren wir diese Ausdrücke der Reihe nach, lassen sie sich als eine unendliche Folge schreiben.[24]

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

Die Art der systematischen Anordnung ist hierbei beliebig. Man kann sagen, dass ein A_i einem A_j voranzugehen habe, wenn A_i eine geringere Anzahl von Buchstaben enthält oder, falls beide Ausdrücke genauso viele Buchstaben besitzen, wenn der erste nicht beiden Ausdrücken gemeinsame Buchstabe von A_i im Alphabet vor dem entsprechenden Buchstaben von A_j steht.

Für zwei beliebige Zahlen n und k muss somit entweder gelten,

[24] Die hier verwendete mathematische Ausdrucksweise der Antinomie von Richard entspricht derjenigen, die Wolfgang Stegmüller in *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit* benutzt. Sie ist hilfreich, um intuitiv die Analogie zu Gödels Beweis herzustellen.

dass n die durch A_k bezeichnete Eigenschaft besitzt, oder dass n die durch A_k bezeichnete Eigenschaft nicht besitzt. Im ersten Fall schreiben wir als Abkürzung $A_k(n)$, im zweiten Fall $\neg A_k(n)$. Welche Eigenschaft beschreibt aber die Formel $\neg A_n(n)$? Es ist eine in der deutschen Sprache definierte Eigenschaft, denn die Formel sagt aus: „n besitzt nicht die Eigenschaft, die durch A_n bezeichnet wird.“. Diese Aussage ist also offenbar eine Definition, welche eine Eigenschaft von natürlichen Zahlen beschreibt. Da unsere Folge alle deutschen Ausdrücke, welche Zahleigenschaften definieren, enthält, muss also auch diese Definition in ihr enthalten sein. Die hier definierte Eigenschaft muss also mit einem dieser A_i zusammenfallen — es muss eine Zahl r geben, die die Nummer dieser Aussage ist. Für dieses r müssen die Bedingungen $A_r(n)$ und $\neg A_n(n)$ gelten. Was für ein beliebiges n gilt, muss auch für ein spezielles r gelten. Es muss also gleichzeitig $A_r(r)$ und $\neg A_r(r)$ sein. Die Zahl r besitzt die durch A_r beschriebene Eigenschaft laut dem Inhalt der Bedingung genau dann, wenn die Zahl r die durch A_r beschriebene Eigenschaft nicht besitzt. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

Dieser Widerspruch rührt daher, dass wir uns nicht ganz an die Spielregeln gehalten haben. Die Definition einer Zahleigenschaft ist eine metamathematische Aussage, welche ausschließlich etwas über die Mathematik aussagt. Die Definition derjenigen Zahleigenschaft, die wir für die Konstruktion der Antinomie von Richard benötigt haben —

„n besitzt nicht die Eigenschaft, welche durch A_n bezeichnet wird“ — hingegen entspricht im Grunde nicht unseren Voraussetzungen, denn sie enthält eine Aussage über eine Zahl n und über eine weitere metamathematische Aussage A_n, was unzulässig ist. Strenggenommen gehört diese Aussage deshalb gar nicht zu unserer Folge.

Obwohl die Antinomie von Richard eindeutig auf einem Trugschluss beruht, beherbergt sie nichtsdestotrotz den Vorschlag, metamathematische Aussagen über ein formales System in dem System selbst wiederzuspiegeln — einen Vorschlag, den Gödel später aufgriff.

A.4 Die Peanoschen Axiome

Die Peanoschen Axiome lauten[25]:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger n', der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.
3. Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist.
4. Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.

[25] http://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome

5. Von allen Mengen X, welche die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch stets deren Nachfolger n' enthalten, ist die Menge der natürlichen Zahlen die kleinste.

A.5 Verwendete logische Symbole

Grundzeichen	Gödelzahl	Bedeutung
$\neg$	1	nicht
$\vee$	2	oder
$\supset$	3	wenn …, dann …
$\exists$	4	es gibt ein …
$=$	5	… ist gleich …
0	6	Null
f	7	der unmittelbare Nachfolger von …
(	8	Interpunktionszeichen
)	9	Interpunktionszeichen
,	10	Interpunktionszeichen

Tabelle 1: Konstanten

Die hier abgedruckte Zuordnung der Gödelzahlen zu den Grundzeichen stammt aus dem bekannten Buch „Gödel's Proof" von Nagel und Newman[26]. Im Original geht sie noch weiter: Den numerischen Variablen werden die weiteren natürlichen Zahlen von 11 aufwärts zugeordnet, den Satzvariablen deren Quadrate und den Prädikatvariablen deren dritte Potenzen.

[26] Nagel, Ernest und Newman, James, Gödel's Proof, Routledge & Kegan Paul, 1981

B Anhang B

B.1 Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz ist eine Konsequenz, welche sich aus dem ersten ergibt: „Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, so ist sie unvollständig.“ Das heißt, es gibt mindestens einen Satz y, der unbeweisbar ist. Nun lässt sich auch diese Aussage durch die Beweisbarkeit einer Formel innerhalb der Arithmetik repräsentieren, welche wir als B bezeichnen:

$$\exists b : \neg Bew(a,b)$$

Nun resultiert aber aus der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik deren Unvollständigkeit, welche durch Formel A aus 3.7 repräsentiert wird. Dieses Verhältnis können wir also so ausdrücken:

$$\exists b : \neg Bew(a,b) \rightarrow \neg \exists b : Bew\left(b, sub\left[f,f\right]\right)$$

Oder einfach folgendermaßen:

$$B \rightarrow A$$

Aus B resultiert A. Das heißt, wenn B beweisbar ist, dann ergibt sich daraus die Beweisbarkeit von A. Der Satz A ist aber unentscheidbar; demnach kann auch B nicht beweisbar sein, denn sonst wäre ja A bewiesen. Dies bedeutet, dass in einem widerspruchsfreien System selbst kein Beweis der Widerspruchsfreiheit konstruiert werden kann.

B.2 Die Kontinuumshypothese

Ein Beispiel für den Gödelschen Unvollständigkeitssatz ist jenes Problem, welches in Hilberts Liste der 23 ungelösten Probleme an erster Stelle stand. Sie lautet:

> Es gibt keine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen, die in ihrer Mächtigkeit kleiner ist als die der reellen Zahlen.[27]

Kurt Gödel bewies, dass die Kontinuumshypothese widerspruchsfrei ist, wenn die *ZF*–Mengenlehre widerspruchsfrei ist, da sie sich aus diesem System heraus nicht widerlegen lässt. Paul Cohen zeigte, dass sie sich daraus allerdings auch nicht beweisen lässt — sie ist unentscheidbar.

B.3 Die Goldbachsche Vermutung

Ein weiteres, bisher nicht entschiedenes Problem der Mathematik, welches möglicherweise eine weitere Demonstration des Unvollständigkeitssatzes ist, ist die Goldbachsche Vermutung: „Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.“[28] Im Gegensatz zur Kontinuumshypothese ist in diesem Fall

[27] http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese
[28] http://de.wikipedia.org/wiki/Goldbachsche_Vermutung

jedoch unklar, ob die Hypothese tatsächlich nicht bewiesen werden kann und somit eine Demonstration von Gödels Satz darstellt.

B.4 Künstliche Intelligenz

Die Wirkungsweise von Computern besteht in einer Schritt-für-Schritt-Vorgehensweise, wobei jeder Schritt gemäß vorgegebenen Regeln verläuft. Auf diese Art und Weise sind sie in der Lage, von einem gegebenen Axiomensatz ausgehend Erkenntnisse zu gewinnen. Gödels Unvollständigkeitssatz lässt jedoch darauf schließen, dass es Grenzen der Berechenbarkeit gibt und dass in hinreichend komplexen formalen Systemen wahre, nicht ableitbare Aussagen auftauchen können. Dass wir Menschen dennoch fähig sind, derartige Aussagen zu finden, lässt darauf schließen, dass wir nicht nach demselben rechnerischen Schema funktionieren wie Computer. Wir haben gesehen, dass sich auch der von Gödel konstruierte unentscheidbare Satz auf Meta-Ebene durch eine einfache Überlegung zu dessen Bedeutung entscheiden lässt. Da ein Computer nun nicht in der Lage ist, über sein System hinaus zu urteilen, spricht dies gegen die Möglichkeit einer perfekten Computersimulation der Funktionsweise des menschlichen Gehirns und stellt damit nach einigen Autoren ein Argument gegen die Möglichkeit einer künstlichen Intelligenz dar.

Dennoch funktionieren auch wir nur innerhalb bestimmter Muster. Das menschliche Gehirn ist noch nicht hinreichend erforscht, um sagen zu können, wie viel weniger es den Kriterien für die Existenz von Einschränkungen, die den durch den Unvollständigkeitssatz verursachten, entspricht als Computer. Unser Denken ist nicht zwangsweise vollständig. Daher ist unklar, ob die Auswirkungen von Gödels Unvollständigkeitssatz auf die Mathematik es unmöglich machen werden, künstliche Intelligenz zu kreieren.

Literatur

[1] Gödel, Kurt, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 1931

[2] Hofstadter, Douglas R.: Gödel, Escher, Bach - ein endloses geflochtenes Band, dtv 1991

[3] Kaiser, Hans und Nöbauer, Wilfried, Geschichte der Mathematik, Oldenbourg Schulbuchverlag, München, 2002

[4] Kreuzer, Franz, Gödel-Satz, Möbius-Schleife, Computer-Ich, Franz Deuticke Verlagsgesellschaft m. b. H., Wien, 1986

[5] Nagel, Ernest und Newman, James, Gödel's Proof, Routledge & Kegan Paul, 1981

[6] Stegmüller, Wolfgang, Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit, Springer-Verlag, Wien-New York, 1973

Quellen aus dem Internet:

[7a] http://de.wikipedia.org/wiki/Goldbachsche_Vermutung

[7b] http://de.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6delscher_Unvollst%C3%A4ndigkeitssatz

[7c] http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese

[7d] http://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome

[7e] http://de.wikipedia.org/wiki/Principia_mathematica

[7f] http://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_logischer_Symbole

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe

angefertigt habe und nur die im Literaturverzeichnis

angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

....

Ort Datum Unterschrift des Schülers / der Schülerin